

Μετρικοί Χώροι και η Τοπολογία τους

Εξετάσεις Ιουνίου 2026

19 Ιουνίου 2026

Θέμα 1 (2,5 μον.)

Εκφώνηση:

Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$ όπου ρ είναι η συνήθης μετρική και το σύνολο

$$E = [0, 3] \cup \{5\} \cup (8, 9].$$

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα με πλήρη αιτιολόγηση.

- α) Να βρείτε την κλειστή θήκη, το εσωτερικό, το παράγωγο σύνολο και το σύνορο του E .
- β) Ποιες είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του μετρικού χώρου (E, ρ_E) .
- γ) Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του E που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του E ως προς τη σχετική μετρική.

Λύση: α) Εργαζόμαστε στον χώρο $(\mathbb{R}, \rho)$ με τη συνήθη μετρική:

- **Κλειστή θήκη ($\bar{E}$):** Από τις ιδιότητες της κλειστής θήκης, έχουμε:

$$\bar{E} = \overline{[0, 3]} \cup \overline{\{5\}} \cup \overline{(8, 9]} = [0, 3] \cup \{5\} \cup [8, 9]$$

- **Εσωτερικό (E°):** Το εσωτερικό αποτελείται από τα σημεία που περιέχουν μια ανοικτή περιοχή ολόκληρη μέσα στο E . Το $\{5\}$ δεν έχει εσωτερικά σημεία. Άρα:

$$E^\circ = (0, 3) \cup (8, 9)$$

- **Παράγωγο σύνολο (E'):** Είναι το σύνολο όλων των σημείων συσσώρευσης του E . Το μεμονωμένο σημείο $x = 5$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης (υπάρχει η περιοχή $(4, 6)$ που δεν τέμνει το $E \setminus \{5\}$). Τα διαστήματα δίνουν όλα τα σημεία τους μαζί με τα άκρα τους. Συνεπώς:

$$E' = [0, 3] \cup [8, 9]$$

- **Σύνορο (∂E):** Δίνεται από τον τύπο $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$. Έχουμε:

$$\partial E = ([0, 3] \cup \{5\} \cup [8, 9]) \setminus ((0, 3) \cup (8, 9)) = \{0, 3, 5, 8, 9\}$$

β) Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός χώρου είναι τα μέγιστα (ως προς τον εγκλεισμό) συνεκτικά υποσύνολά του. Τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικά σύνολα. Τα σύνολα $A = [0, 3]$, $B = \{5\}$ και $C = (8, 9]$ είναι συνεκτικά και αποτελούν μια διαμέριση του E . Επιπλέον, δεν υπάρχει μεγαλύτερο

συνεκτικό υποσύνολο που να τα περιέχει.

Συνεπώς, οι συνεκτικές συνιστώσες του (E, ρ_E) είναι ακριβώς τα σύνολα:

$$[0, 3), \quad \{5\}, \quad (8, 9]$$

γ) Ένα σύνολο είναι ταυτόχρονα σχετικά ανοικτό και σχετικά κλειστό αν και μόνο αν είναι ένωση κάποιων συνεκτικών συνιστωσών του χώρου.

Καθώς οι συνεκτικές συνιστώσες είναι 3 τον αριθμό, τα σχετικά ανοικτά και σχετικά κλειστά υποσύνολα του E προκύπτουν από όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ενώσεων αυτών των τριών συνιστωσών. Άρα υπάρχουν $2^3 = 8$ τέτοια υποσύνολα, τα οποία είναι:

1. $\emptyset$ (το κενό σύνολο)
2. $[0, 3)$
3. $\{5\}$
4. $(8, 9]$
5. $[0, 3) \cup \{5\}$
6. $[0, 3) \cup (8, 9]$
7. $\{5\} \cup (8, 9]$
8. $E = [0, 3) \cup \{5\} \cup (8, 9]$

□

Θέμα 2 (3 μον.)

Εκφώνηση:

Να εξετάσετε αν καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής, με πλήρη αιτιολόγηση (δηλ. απόδειξη στην περίπτωση που είναι αληθής και κατάλληλο αντιπαράδειγμα στην περίπτωση που είναι ψευδής).

- (A) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε υπάρχουν δύο ανοικτά υποσύνολα U, V του X με $x \in U$, $y \in V$ και $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
- (B) Αν (X, ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και A, B είναι δύο μη κενά ανοικτά υποσύνολα του X με $A \cap B = \emptyset$, τότε υπάρχουν δύο κλειστά υποσύνολα K, L του X ώστε $A \subseteq K$, $B \subseteq L$ και $K \cap L = \emptyset$.
- (Γ) Αν (X, ρ) είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, (Y, σ) είναι ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow Y$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Y , το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X .

Λύση: (A) ΑΛΗΘΗΣ.

Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε $\rho(x, y) = \epsilon > 0$. Θεωρούμε τα ανοικτά σύνολα $U = B(x, \frac{\epsilon}{3})$ και $V = B(y, \frac{\epsilon}{3})$. Είναι γνωστό ότι $\bar{B}(x, \frac{\epsilon}{3}) \subseteq \{z \in X : \rho(x, z) \leq \frac{\epsilon}{3}\}$. Αν υπήρχε $z \in \bar{U} \cap \bar{V}$, τότε από την τριγωνική ανισότητα θα είχαμε:

$$\epsilon = \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3}$$

πράγμα που είναι άτοπο αφού $\epsilon > 0$. Άρα $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

(Β) ΨΕΥΔΗΣ.

Αντιπαράδειγμα: Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $X = \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική καθώς και τα ανοικτά υποσύνολα $A = (0, 1)$ και $B = (1, 2)$, αυτού. Προφανώς $A \cap B = \emptyset$. Αν υπήρχαν κλειστά σύνολα K, L στο X με $A \subseteq K$ και $B \subseteq L$, τότε θα έπρεπε $\bar{A} \subseteq K$ και $\bar{B} \subseteq L$. Όμως, η κλειστή θήκη του A είναι το $\bar{A} = [0, 1]$, και αντίστοιχα η κλειστή θήκη του B είναι το $\bar{B} = [1, 2]$. Συνεπώς, $1 \in \bar{A} \subseteq K$ και $1 \in \bar{B} \subseteq L$. Άρα $1 \in K \cap L$, το οποίο σημαίνει ότι $K \cap L \neq \emptyset$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

(Γ) ΑΛΗΘΗΣ.

Απόδειξη: Έστω $K \subseteq Y$ συμπαγές. Επειδή ο Y είναι μετρικός χώρος, κάθε συμπαγές υποσύνολό του είναι και κλειστό. Επομένως, το K είναι κλειστό σύνολο στο Y . Επειδή η συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής, η αντίστροφη εικόνα του κλειστού συνόλου K , δηλαδή το σύνολο $f^{-1}(K)$, είναι κλειστό υποσύνολο του X .

Όμως, ο χώρος X είναι από την υπόθεση συμπαγής μετρικός χώρος. Είναι γνωστό θεώρημα της Τοπολογίας ότι κάθε κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς χώρου είναι επίσης συμπαγές σύνολο. Εφόσον το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς χώρου X , συμπεραίνουμε ότι το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές. $\square$

Θέμα 3 (3 μον.)**Εκφώνηση:**

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος.

- α) Αν D είναι ένα υποσύνολο του X , να δείξετε ότι το D είναι πυκνό αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X με $G \neq \emptyset$ ισχύει $D \cap G \neq \emptyset$.
- β) Αν $n \in \mathbb{N}$ και $(G_i)_{i=1}^n$ είναι ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X , να δείξετε ότι το σύνολο $\bigcap_{i=1}^n G_i$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .
- γ) Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X , να δείξετε ότι το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

Λύση: α) $(\Rightarrow)$ Έστω ότι το D είναι πυκνό στο X , δηλαδή $\bar{D} = X$. Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό και μη κενό. Αφού $G \neq \emptyset$, υπάρχει $x \in G$. Επειδή το G είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \epsilon) \subseteq G$. Επειδή $x \in X = \bar{D}$, το x είναι σημείο επαφής του D . Οπότε, από τον ορισμό του σημείου επαφής έπεται ότι $B_\rho(x, \epsilon) \cap D \neq \emptyset$. Συνεπώς, $D \cap G \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι για κάθε ανοικτό $G \neq \emptyset$ ισχύει $D \cap G \neq \emptyset$. Θα δείξουμε ότι $\bar{D} = X$. Αρκεί να δείξουμε ότι $X \subseteq \bar{D}$. Έστω $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Τότε το $B_\rho(x, \epsilon)$ είναι ανοικτό και μη κενό (αφού $x \in B_\rho(x, \epsilon)$). Από την υπόθεση, $D \cap B_\rho(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in \bar{D}$. Συνεπώς $\bar{D} = X$, δηλαδή το D είναι πυκνό.

β) Θα κάνουμε χρήση μαθηματικής επαγωγής ως προς n .

- Για $n = 1$, το G_1 είναι πυκνό εξ υποθέσεως.
- Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $n = k$, δηλαδή το $A = \bigcap_{i=1}^k G_i$ είναι πυκνό (και προφανώς ανοικτό ως πεπερασμένη τομή ανοικτών).

- Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή το $A \cap G_{k+1}$ είναι πυκνό. Έστω $G \subseteq X$ ένα τυχόν ανοικτό και μη κενό σύνολο. Επειδή το A είναι ανοικτό και πυκνό, από το (α) έχουμε ότι το $G \cap A$ είναι ανοικτό και μη κενό. Επειδή το G_{k+1} είναι επίσης πυκνό, εφαρμόζοντας ξανά το κριτήριο (α) για το ανοικτό και μη κενό σύνολο $G \cap A$, παίρνουμε:

$$(G \cap A) \cap G_{k+1} \neq \emptyset \implies G \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k+1} G_i \right) \neq \emptyset$$

Από το ερώτημα (α), η πεπερασμένη τομή είναι πυκνό υποσύνολο του X .

γ) Η πρόταση αυτή αποτελεί το διάσημο **Θεώρημα Κατηγορίας του Baire** για πλήρεις μετρικούς χώρους.

Έστω $G \subseteq X$ ένα τυχόν ανοικτό και μη κενό σύνολο. Θα δείξουμε ότι $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cap G \neq \emptyset$.

1. Επειδή το G_1 είναι πυκνό, η τομή $G \cap G_1$ είναι ανοικτή και μη κενή. Άρα υπάρχει $x_1 \in G \cap G_1$ και μια κλειστή μπάλα $\hat{B}(x_1, r_1) \subseteq G \cap G_1$ με ακτίνα $0 < r_1 < 1$.
2. Επειδή το G_2 είναι πυκνό, η τομή $\hat{B}(x_1, r_1) \cap G_2$ είναι ανοικτή και μη κενή. Έτσι, μπορούμε να βρούμε x_2 και κλειστή μπάλα $\hat{B}(x_2, r_2) \subseteq \hat{B}(x_1, r_1) \cap G_2$ με ακτίνα $0 < r_2 < 1/2$.
3. Επαγωγικά, κατασκευάζουμε μια ακολουθία κλειστών μπαλών $\hat{B}(x_n, r_n)$ τέτοια ώστε:

$$\hat{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \hat{B}(x_n, r_n) \cap G_{n+1} \quad \text{και} \quad 0 < r_n < \frac{1}{n}$$

Παρατηρούμε ότι $\hat{B}(x_1, r_1) \supseteq \hat{B}(x_2, r_2) \supseteq \dots \supseteq \hat{B}(x_n, r_n) \supseteq \dots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X των οποίων η διάμετρος τείνει στο 0, γιατί

$$\text{diam}(\hat{B}(x_n, r_n)) \leq 2r_n \rightarrow 0.$$

Επειδή ο χώρος (X, ρ) είναι πλήρης, από την **Αρχή Κιβωτισμού του Cantor**, η τομή όλων αυτών των κλειστών μπαλών είναι μη κενή και περιέχει ακριβώς ένα σημείο $x \in X$:

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$$

Από την κατασκευή μας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$x \in \hat{B}(x_n, r_n) \subseteq G \cap G_1 \cap \dots \cap G_n$$

Συνεπώς, το $x \in G$ και $x \in G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in G \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right)$, άρα η τομή

είναι μη κενή. Από το ερώτημα (α), το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό στο X . □

Θέμα 4 (1,5 μον.)**Εκφώνηση:**

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και A, B δύο μη κενά υποσύνολα του X ώστε το A να είναι συμπαγές, το B να είναι κλειστό και να ισχύει $A \cap B = \emptyset$. Να δείξετε ότι $\rho(A, B) > 0$.

Λύση: Η απόσταση μεταξύ δύο συνόλων ορίζεται ως $\rho(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση απόστασης από το σύνολο B , δηλαδή τη $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \rho(x, B) = \inf\{\rho(x, b) : b \in B\}$$

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση αυτή είναι ομοιόμορφα συνεχής (και άρα συνεχής) στον X , καθώς ικανοποιεί την ανισότητα $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.

Περιορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση f στο συμπαγές σύνολο A . Σύμφωνα με το **Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής**, μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγές σύνολο προσλαμβάνει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε:

$$\inf_{a \in A} f(a) = f(a_0) \implies \rho(A, B) = \rho(a_0, B)$$

Επειδή το σύνολο B είναι κλειστό, ισχύει η ιδιότητα ότι $\rho(x, B) = 0 \iff x \in \bar{B} = B$.

Όμως, γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $A \cap B = \emptyset$. Εφόσον το $a_0 \in A$, συμπεραίνουμε αναγκαστικά ότι $a_0 \notin B$.

Επομένως, αφού το B είναι κλειστό και $a_0 \notin B$, η απόσταση του a_0 από το B πρέπει να είναι αυστηρά θετική:

$$\rho(A, B) = \rho(a_0, B) > 0$$

β' τρόπος: Έχουμε, $0 = \rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$

το inf είναι σε του $\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$ $\rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A , $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο B έτσι ώστε

$$\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(A, B) = 0$$

Εφόσον το A συμπαγές, είναι και ακολουθιακά συμπαγές. Επίσης, $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα $\exists (x_{k_n})$ και $\alpha \in A$ ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} \alpha$. Τώρα, θα αποδείξουμε ότι $\alpha \in B$

Αυτό μπορεί να επιτευχθεί αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία στοιχείων του B που τείνει στο α .

$$\text{Αφού } \rho(x_n, y_n) \xrightarrow{n} 0 \implies \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) \xrightarrow{n} 0$$

Τότε, $y_{k_n} \xrightarrow{\rho} \alpha$, γιατί

$$0 \leq \rho(y_{k_n}, \alpha) \leq \rho(y_{k_n}, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, \alpha) \xrightarrow{n} 0 + 0 = 0$$

Αφού B κλειστό & $\underbrace{y_{k_n}}_{\in B} \xrightarrow{\rho} \alpha \implies \alpha \in B$

Οπότε, $\alpha \in A \cap B$ και $A \cap B \neq \emptyset$ που είναι άτοπο. □